Instituto de Matemática
Campus Curicó
06/08/2018

# Prueba N°3
# Cálculo 1

| Apellido paterno: | Apellido materno: | Nombre: |
|---|---|---|
| | | |

| Pregunta 1 | Pregunta 2 | Pregunta 3 | Total | Nota |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**Instrucciones**:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

**Nota** $= 1 + \dfrac{Puntos}{10}$.

**Duración** = 60 minutos

---

1) **[20 ptos]** Dada la ecuación $x^2y - \ln(2 - y^2) = x$. Determinar:

   *a*) **[10 ptos.]** $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

   *b*) **[10 ptos.]** las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva en el punto $(0, 1)$.

2) **[20 ptos]** Sea $f(x) = x^{1/2} \cdot (x - 3)^2$

   *a*) **[2 pts]** Obtenga dominio de $f$.

   *b*) **[6 pts]** Obtenga los puntos críticos de $f$ e intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f$.

   *c*) **[6 pts]** Determine máximos y mínimos de $f$ (si es que existen).

   *d*) **[6 pts]** Realice un esbozo de la gráfica de $f(x)$.

3) **[20 ptos]** Un Ingeniero debe resolver un problema en el cual le solicitan hallar dos números positivos que minimicen la suma del doble del primero más el segundo, si el producto de los dos números es 288. Con estos datos podrías ayudar al Ingenierio a resolver el problema.

# Pauta :

1) *a*) derivando con respecto a $x$ en ambos lados de la igualdad.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^2 \cdot y - \ln(2-y^2)) &= \frac{d}{dx}(x) && \textbf{[1 pto]} \\
2xy + x^2y' + \frac{2y \cdot y'}{2-y^2} &= 1 && \textbf{[3 pts]} \\
y'\left(x^2 + \frac{2y}{2-y^2}\right) &= 1 - 2xy && \textbf{[3 pts]} \\
y' = \frac{dy}{dx} &= \frac{1-2xy}{x^2 + \frac{2y}{2-y^2}} && \textbf{[3 pts]}
\end{aligned}$$

*b*)
- La recta tangente $T$ tiene la forma:

$$T \,:\, y - 1 = y'(0,1) \cdot (x - 0) \Longrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

**[5 pts]**

- La recta normal $N$ tiene la forma:

$$N \,:\, y - 1 = -\frac{1}{y'(0,1)} \cdot (x - 0) \Longrightarrow y = -2x + 1$$

**[5 pts]**

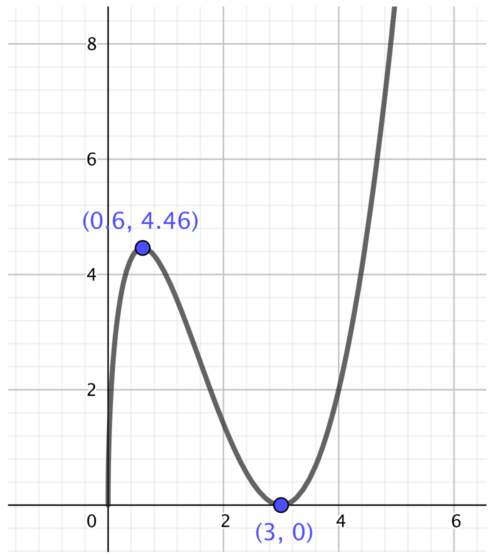
2) *a*) Claramente $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$ **[2 pts]**

*b*)
- $$\begin{aligned}
f'(x) = (x^{1/2})' \cdot (x-3)^2 + ((x-3)^2)' \cdot x^{1/2} &= \frac{(x-3)^2}{2x^{1/2}} + 2(x-3) \cdot x^{1/2} \\
&= \frac{(x-3)^2 + 4x \cdot (x-3)}{2x^{1/2}} \\
&= \frac{(x-3) \cdot (5x-3)}{2x^{1/2}} && \textbf{[2 pts]}
\end{aligned}$$
- $f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{(x-3) \cdot (5x-3)}{2x^{1/2}} = 0 \Longrightarrow x = 3 \quad \text{y} \quad x = \dfrac{3}{5}$ **[2 pts]**
- Para $x = 0$, note que $f'(x)$ no está definida, se incluyen en el estudio de la tabla de signos , pero no serán ni máximos, ni mínimos.
- Los intervalos de crecimiento de $f$ son $]0, 3/5[$, $]3, +\infty[$ y decrecimiento de $f$ son $]3/5, 3[$. **[2 pts]**

*c*) Note que

- en $x = 3/5$ (máximo), pues cambia de $+$ a $-$, se alcanza en $(3/5, f(3/5)) = (3/5; 4,46)$ **[3 pts]**
- en $x = 3$ (mínimo), pues cambia de $-$ a $+$, se alcanza en $(3, f(3)) = (3, 0)$. **[3 pts]**

*d*) La gráfica de $f$ queda:




**[6 pts]**

3) - Sea : $x =$ El primer número e $y =$ El segundo número y $S$ la suma de ellos. **[2 pts]**

- Del enunciado se deduce que $S(x,y) = 2x + y \quad$ y $\quad x \cdot y = 288 \Longrightarrow y = \dfrac{288}{x}$ **[6 pts]**

- Luego $S(x) = 2x + \dfrac{288}{x}$ con $x > 0$ (Modelo funcional) **[2 pts]**

- $S'(x) = 2 - \dfrac{288}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 288}{x^2}$, donde $S'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 12$ (Valor crítico) **[2 pts]**

- Derivando nuevamente $S'(x)$ con respecto a $x$, se obtiene:

$$S''(x) = \frac{288}{x^3},\ \forall\, x > 0$$

**[2 pts]**

Evaluando para $x = 12$, tenemos que $S''(12) > 0$, Luego en $x = 12$ se tiene un mínimo (Por el criterio de la segunda derivada) **[4 pts]**

- Finalmente los números buscados son $x = 12$ e $y = 24$. **[2 pts]**